1.C

Nuclear Physics **15** (1960) 89—91; © *North-Holland Publishing Co., Amsterdam*

UNE DÉMONSTRATION SIMPLIFIÉE DU THÉORÈME DE WICK EN MÉCANIQUE STATISTIQUE

MICHEL GAUDIN

Département de Recherche Physique, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, Gif-sur Yvette (S & O)

Reçu le 9 Septembre 1959

Abstract: Wick's theorem in statistical mechanics is proved directly by using the commutation rules

Nous proposons une démonstration du théorème de Wick généralisé [1]) concernant la valeur moyenne, au sens de la mécanique statistique, d'un produit d'opérateurs de création et d'annihilation de bosons ou de fermions. Ce théorème est à la base d'un développement du potentiel de Gibbs en termes de diagrammes, analogue à celui de Goldstone pour l'énergie de l'état fondamental

L'opérateur statistique ρ du système non perturbé est un produit d'opérateurs ρ_k, relatifs à chaque état k, commutant les uns avec les autres:

$$\rho_k = \frac{e^{-\beta E_k n_k}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta E_k n_k}},$$

où

$$n_k = \eta_k{}^\dagger \eta_k,$$

et

$$E_k = \varepsilon_k - \lambda,$$

ε_k étant l'énergie de l'état k et λ le potentiel chimique. Les opérateurs η et $\eta^\dagger$ suivent les règles de commutation habituelles. Nous poserons

$$[\eta\eta^\dagger] = \eta\eta^\dagger - \varepsilon\eta^\dagger\eta,$$

où ε est égal à $+1$ ou à -1 suivant que η est un opérateur de boson ou de fermion.

Il s'agit de calculer $\mathrm{Tr}\{abcd \ldots ef\rho\}$, où $abcd \ldots ef$ est un produit quelconque de $2n$ opérateurs de création ou d'annihilation. Un tel produit n'a d'éléments diagonaux dans le nombre total de particules que s'il contient autant d'opérateurs de création que d'annihilation. Pour un nombre impair d'opérateurs la trace considérée est donc nulle. Nous allons montrer que si le théorème est vrai pour tout produit de $2(n-1)$ opérateurs, il est vrai aussi pour $2n$ opérateurs.

En commutant successivement a avec les opérateurs $b, c, \ldots f$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\{abcd\ldots ef\rho\}\\
=\ &\mathrm{Tr}\{[ab]cd\ldots ef\rho\}+\varepsilon\,\mathrm{Tr}\,\{b[ac]d\ldots ef\rho\}\\
+\ &\mathrm{Tr}\{bc[ad]\ldots ef\rho\}+\ldots+\mathrm{Tr}\{bcd\ldots e[af]\rho\}\\
+&\varepsilon\,\mathrm{Tr}\{bcd\ldots efa\rho\}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Les crochets du type $[ab]$ sont des nombres purs égaux à 1, -1 ou 0, que l'on peut faire sortir des traces. D'autre part, il est aisé de démontrer les égalités suivantes:

$$
\begin{aligned}
e^{-\beta E_k n_k}\eta_k{}^\dagger &= e^{-\beta E_k}\eta_k{}^\dagger e^{-\beta E_k n_k},\\
e^{-\beta E_k n_k}\eta_k &= e^{+\beta E_k}\eta_k\ e^{-\beta E_k n_k},
\end{aligned}
$$

d'où l'on déduit

$$
\begin{aligned}
\rho\eta_k{}^\dagger &= e^{-\beta E_k}\eta_k{}^\dagger\rho,\\
\rho\eta_k &= e^{+\beta E_k}\eta_k\ \rho.
\end{aligned}
$$

Dans la dernière trace du second membre de l'égalité (1), nous pouvons donc remplacer $a\rho$ par $\rho a e^{\pm\beta E}$, en choisissant $e^{\beta E}$ ou $e^{-\beta E}$ suivant que a est un opérateur de création ou d'annihilation; E est l'énergie relative à l'opérateur a. Nous avons donc

$$
\mathrm{Tr}\{bcd\ldots efa\rho\} = e^{\pm\beta E}\,\mathrm{Tr}\{abcd\ldots ef\rho\}.
$$

Portons ce résultat dans l'égalité (1), faisons passer au premier membre le dernier terme du second membre et divisions par $1-\varepsilon e^{\pm\beta E}$. Nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\{abcd\ldots ef\rho\}\\
&=\frac{[ab]}{1-\varepsilon e^{\pm\beta E}}\mathrm{Tr}\{cd\ldots ef\rho\}\\
&+\varepsilon\frac{[ac]}{1-\varepsilon e^{\pm\beta E}}\mathrm{Tr}\{bd\ldots ef\rho\}\\
&+\ldots\\
&+\frac{[af]}{1-\varepsilon e^{\pm\beta E}}\mathrm{Tr}\{bcd\ldots e\rho\}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Nous définissons maintenant la contraction de deux opérateurs a et b par l'égalité

$$
a^{\cdot}b^{\cdot} = \frac{[ab]}{1-\varepsilon e^{\pm\beta E}},
$$

où E est l'énergie relative à l'opérateur a. Cette contraction n'est différente de zéro que dans les deux cas suivants:

1°) a est un opérateur de création, soit $\eta_k^\dagger$:

$$\eta_k^{\dagger\cdot}\,\eta_k^{\cdot} = \frac{[\eta_k^\dagger\eta_k]}{1-\varepsilon e^{-\beta E_k}} = \frac{-\varepsilon}{1-\varepsilon e^{-\beta E_k}} = \frac{1}{e^{\beta E_k}-\varepsilon}$$

2°) a est un opérateur d'annnihilation, soit η_k:

$$\eta_k^{\cdot}\,\eta_k^{\dagger\cdot} = \frac{[\eta_k\eta_k^\dagger]}{1-\varepsilon e^{\beta E_k}} = \frac{1}{1-\varepsilon e^{\beta E_k}}$$

L'égalité (2) s'écrit alors sous la forme

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\{abcd\ \ldots\ ef\rho\}\\ &= a^{\cdot}b^{\cdot}\,\mathrm{Tr}\{cd\ldots ef\rho\}+\varepsilon a^{\cdot}c^{\cdot}\,\mathrm{Tr}\{bd\ldots ef\rho\}\\ &+ a\,d^{\cdot}\,\mathrm{Tr}\{bc\ldots ef\rho\}+\ldots\\ &+ a\,f^{\cdot}\,\mathrm{Tr}\,\{bcd\ldots e\rho\}.\end{aligned} \tag{3}$$

Les traces du deuxième membre de cette égalité contiennent $2(n-1)$ opérateurs; si le théorème de Wick est supposé vrai jusqu'à cet ordre, nous reconnaissons au second membre les systèmes de contractions du produit de $2n$ opérateurs a, b, c, d, $\ldots$ e, f, qui contiennent successivement $a^{\cdot}b^{\cdot}$, $a^{\cdot}c^{\cdot}$, $\ldots$, $a^{\cdot}f^{\cdot}$.

Bibliographie

1) T. Matsubara, Progr Theor. Phys. **14** (1955) 351;
T Thouless, Phys. Rev. **107** (1957) 1162·
C Bloch et C. De Dominicis, Nuclear Physics **7** (1958) 459